פרק ב׳: תחביר תחשיב הפסוקים

בפרק הקודם למדנו להכיר את תחשיב היחסים, שהוא שפת המתמטיקה, עתה ניגש לחקור אותו באופן יסודי. בשלב הראשון לא נחקור את תחשיב היחסים כולו אלא רק את התיפקוד של הקשרים. לשם כך נבנה שפה מצומצמת הנקראת תחשיב הפסוקים. למרות שתחשיב הפסוקים אינו השפה המתמטית בה אנו מעוניינים יהיו לחקר תחשיב זה שלוש תוצאות מועילות. הראשונה היא שנוכל להכיר היטב את התיפקוד של הקשרים בשפה המתמטית מבלי שנצטרך לעסוק מייד בתחשיב היחסים שהוא שפה מורכבת. התוצאה השניה היא שהטיפול בתחשיב הפסוקים ישמש לנו דגם פשוט לטיפול בתחשיב היחסים. התוצאה השלישית היא שלחקר תחשיב הפסוקים יש תוצאות מעניינות גם בתחומים שאינם שייכים ללוגיקה, כגון למעגלים אלקטרוניים. גם בתחשיב הפסוקים אנו מבחינים בין התחביר לסמנטיקה, ובפרק זה נעסוק בתחביר, תוך פזילה לסמנטיקה. הכלים שנפתח כאן לטיפול בתחביר תחשיב הפסוקים ישמשו אותנו בהמשך גם לטיפול בתחביר תחשיב היחסים.

ביטויים בשפה כלשהי הם סדרות סופיות של סימנים, שבשפה טיבעית הם האותיות, סימני הניקוד, הסוגרים וסימני הפיסוק. לכן נדון עתה בקצרה בסדרות. כאשר נדבר על סידרה נתכוון תמיד לסידרה סופית.

2.1 סדרות. **רישא** של הסידרה $a_1, a_2, \ldots, a_n$ היא כל סידרה $a_1, a_2, \ldots, a_m$ עם $1 \leq m \leq n$. סידרה זאת נקראת **רישא ממש** של $a_1, a_2, \ldots, a_n$ אם $m < n$.

סיפא של הסידרה $a_1, a_2, \ldots, a_n$ היא כל סידרה $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ עם $1 \leq k \leq n$.

קטע של הסידרה $a_1, a_2, \ldots, a_n$ היא כל סידרה $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m$ עם $1 \leq k \leq m \leq n$.

צירוף (concatenation) של מיספר סדרות זאת הפעולה של יצירת סידרה ממיספר סדרות ע"י שמ-חברים את הסדרות, לפי הסדר בו הן נתונות, לסידרה אחת. ליתר דיוק, הצירוף של הסדרות $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n_1}, \quad a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n_2}, \quad \ldots, a_{m,1}, a_{m,2}, \quad \ldots, \quad a_{m,n_m}$ הוא הסידרה $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n_1}, a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n_2}, \ldots, a_{m,1}, a_{m,2}, \ldots, a_{m,n_m}$.

אנו נתייחס לתכונות הפשוטות של מושגי הרישא, הסיפא והקטע ופעולת הצירוף כאל דברים ידועים ולא נוכיח אותם כאן.

2.2 סימנים ומחרוזות. את קבוצת הסימנים של השפה נסמן ב-Σ. בשפות טיבעיות קבוצה זאת היא סופית, אבל אנחנו לא נגביל אותה להיות דווקא סופית, ובמקים חשובים נזדקק דווקא לקבוצת סימנים אינסופית. אנו לא נעסוק בשפה מתמטית קבועה אחת, אלא בשפות שונות שהן דומות זו לזו. בשפות בהן אנו נעסוק הביטויים הם סדרות סופיות של הסימנים של Σ. הרווח אינו נחשב לאחד הסימנים של Σ.

לסידרה סופית לא ריקה של סימנים נקרא בשם **מחרוזת**. מכיוון שהמחרוזות הן סדרות אנו יכולים לדבר על רישא של מחרוזת, על סיפא של מחרוזת, על קטע של מחרוזת, ועל צירוף של מחרוזות, כפי שהוגדר ב-2.1. את המחרוזות נסמן, בדרך כלל, באותיות היווניות הקטנות ϕ, ψ, χ, ρ, עם או בלי אינדקסים. את המחרוזת המתקבלת מצירוף המחרוזות $\phi_1, \ldots, \phi_n$ נכתוב כ- $\phi_1\phi_2\ldots\phi_n$.

אנו לא נתעניין בכל המחרוזות אלא רק במחרוזות שנוכל לייחס להם משמעות כשם שכאשר אנו עוסקים בשפה העברית איננו מתעניינים בביטוי "באבאבא" מעבר לקביעה שביטוי זה אינו מילה עברית. למחרוזות בעלות משמעות נקרא בשם **ביטויים**.

סימן x יכול להופיע במחרוזת מיספר פעמים. אם x מופיע במחרוזת ϕ k פעמים אנו נאמר של-x יש k **הופעות** ב-ϕ. אנו גם נאמר שב-ϕ יש k x-ים, למרות שפורמלית זה איננו נכון כי לא מדובר ב-x-ים שונים אלא בהופעות במקומות שונים במחרוזת של אותו x. אנו משתמשים בדרך התבטאות זאת כי היא נוחה יותר ואין חשש שהיא תגרום לאי הבנה.

הפסוקים של תחשיב הפסוקים דומים לפסוקים ולנוסחאות של תחשיב היחסים בכך שהם ביטויים שהם אמיתיים או שיקריים בהתאם למבנה עליו מדובר. בתחשיב היחסים יצרנו את הנוסחאות בעזרת הסימנים האישיים, סימני היחס והפעולה, הקשרים והכמתים. מכל הכלים הללו עומדים לרשותנו בתחשיב הפסוקים רק הקשרים, והקשרים אינם יכולים ליצור פסוקים יש מאין אלא רק מפסוקים קצרים יותר.

לכן אנו זקוקים בתחשיב הפסוקים לסימנים מיוחדים המייצגים פסוקים שאינם מתקבלים מפסוקים פשוטים יותר. למשל, האות P תהיה פסוק בתחשיב הפסוקים, ואנו רשאים לחשוב עליה כעל סימן להיגד מתימטי כלשהו. אנו נצא על כן מקבוצת סימנים שנקרא להם **פסוקים יסודיים**, או **קבועי פסוקים**. מדוע אנו קוראים לסימנים אלו גם בשם קבועי פסוקים? משום שבמצב עניינים נתון, כאשר נדבר על מערכת מסויימת, תהיה להם משמעות קבועה, למרות שכאשר נדבר על מערכות שונות תהיה להם משמעות שונה. למשל למונח העברי "נשיא מדינת ישראל" יש משמעות קבועה בזמן נתון, אבל בזמנים שונים יכול מונח זה להיות בעל משמעויות שונות, כי הוא מתייחס לאנשים שונים. לעיתים קוראים לסימנים אלו גם בשם **פסוקים אטומיים**. הסיבה לשם זה היא שמבחינת תחשיב הפסוקים פסוק כזה הוא פסוק שבא כמות שהוא ואינו מתקבל מהרכבה של פסוקים אחרים בניגוד, למשל, לפסוק "Q או R" המתקבל מן הפסוקים Q ו-R. אנו לא נשתמש במונח "פסוק אטומי" למטרה זאת כי הוא מתנגש עם מינוח בו נשתמש בתחשיב היחסים. מן הפסוקים היסודיים P, Q, R אנו יוצרים באמצעות הקשרים הפסוקיים פסוקים נוספים כגון $P \vee Q$, $P \wedge Q$ ו- $P \rightarrow Q$, ואף פסוקים יותר מסובכים כגון $(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$.

2.3 הגדרה. א. בשם **הפסוקים היסודיים** נקרא לאיברים של קבוצה לא ריקה של סימנים השונים מן הסוגרים השמאלי והימני ומן הפסיק. האותיות P, Q, R, עם או בלי אינדקסים ותגים, תסמנה פסוקים יסודיים.

ב. מן הפסוקים היסודיים אנו יוצרים פסוקים מורכבים באמצעות **הקשרים הפסוקיים היסודיים** (sentential connectives, propositional connectives). אלו הן פעולה חד-מקומית שנסמנה ב-$\neg$ (**שלילה**, negation) ושלוש פעולות דו-מקומיות על קבוצת המחרוזות שנסמנן ב-$\wedge$ (**גימום**, conjunction), ב-$\vee$ (**איווי**, disjunction) וב-$\rightarrow$ (**אימוז**, material implication).

בכל אחת מארבע הפעולות הנ"ל מדובר גם על סימן, שהוא **סימן קשר** וגם על הפעולה, שהיא קשר פסוקי יסודי. כדי להבדיל בין הסימן לפעולה נכתוב את הסימן בגופן עבה ואת הפעולה בגופן רגיל. כך, למשל, סימן הגימום הוא הסימן $\boldsymbol{\wedge}$ ופעולת הגימום היא הפעולה $\wedge$ שהפעלתה על שתי מחרוזות ϕ ו-ψ נותנת מחרוזת מסויימת. אנו נדון מאוחר יותר בשאלה מהי המחרוזת שהפעולה נותנת, והיא תהיה בדרך כלל אחת המחרוזות $\psi \boldsymbol{\wedge} \phi$ או $(\psi)\boldsymbol{\wedge}(\phi)$ או $(\phi \boldsymbol{\wedge} \psi)$, אבל בשלב זה לא משנה לנו כיצד נראית המחרוזת המתקבלת.

כדי שנוכל לדבר על שלוש הפעולות הדו-מקומיות בבת אחת נסמן בסימן $\square$ פעולה כלשהי מהן, וב-$\boldsymbol{\square}$ את הסימן המתאים.

הפעלת הפעולה הדו-מקומית $\square$ על המחרוזות ϕ ו-ψ נותנת מחרוזת שנסמנה ב- $\phi\square\psi$, והפעלת הפעולה החד-מקומית $\neg$ על המחרוזת ϕ נותנת מחרוזת שנסמנה ב- $\neg\phi$.

כיצד מתקבל הפסוק $\neg(P \wedge Q) \vee R$? אנו יוצאים מן הפסוקים היסודיים P ו-Q, יוצרים מהם ע"י הפעולה $\wedge$ את הפסוק $P \wedge Q$ וממנו, ע"י הפעולה $\neg$, את הפסוק $\neg(P \wedge Q)$, ומפסוק זה ומן הפסוק היסודי R אנו מקבלים ע"י הפעולה $\vee$, את הפסוק $\neg(P \wedge Q) \vee R$, שאותו רצינו לקבל. כך בדרך לפסוק $\neg(P \wedge Q) \vee R$ עברנו דרך מספר פסוקים פשוטים יותר. באופן כללי נגדיר שמחרוזת היא פסוק אם אנו יכולים להגיע אליה בדרך כזאת.

2.4 הגדרה. א. **סידרת יצירה של פסוקים** היא סידרה $\phi_1, \ldots, \phi_n$ של מחרוזות שבה כל מחרוזת היא פסוק יסודי או שהיא מתקבלת ממחרוזות קודמות בסידרה ע"י קשר פסוקי יסודי כלשהו.

בדוגמה שהבאנו זה עתה, סידרת המחרוזות $P\,,\,Q\,,P \wedge Q\,,\,\neg(P \wedge Q)\,,\,R\,,\,\neg(P \wedge Q) \vee R$ היא סידרת יצירה של פסוקים.

כאשר אנו עוסקים בתחשיב הפסוקים נשתמש בקיצור **סידרת יצירה** למונח "סידרת יצירה של פסוקים".

ב. מחרוזת נקראת **פסוק** אם היא נמצאת בסידרת יצירה כלשהי.

לכן כל אחת מן המחרוזות בסדרת היצירה בדוגמה לעיל היא פסוק.

2.5 למה. א. כל רישא של סידרת יצירה היא סידרת יצירה.

ב. לכל פסוק ϕ ישנה סידרת יצירה ש-ϕ הוא האיבר האחרון בה.

הוכחה. א. הדבר נובע ישר מן ההגדרה של סידרת יצירה.

ב. מכיוון ש-ϕ פסוק קיימת סידרת יצירה $\phi_1, \ldots, \phi_i, \ldots, \phi_n$ אשר בה $\phi_i = \phi$. הסידרה $\phi_1, \ldots, \phi_i$

היא, לפי א', סידרת יצירה ש-ϕ הוא איברה האחרון.

2.6 משפט. א. כל פסוק יסודי הוא פסוק.

ב. אם ϕ הוא פסוק אז גם $\neg\phi$ הוא פסוק.

ג. אם ϕ ו-ψ הם פסוקים ו-$\Box$ הוא קשר פסוקי יסודי אז גם $\phi\Box\psi$ הוא פסוק.

הוכחה. א. לפסוק יסודי P הסידרה בת איבר אחד P היא סידרת יצירה ולכן P הוא פסוק.

ב. אם ϕ הוא פסוק אז קיימת לו סידרת יצירה $\phi_1,\ldots,\phi_n$. נראה כי הסידרה $\phi_1,\ldots,\phi_n,\neg\phi$ היא סידרת יצירה, ולכן, כמובן, $\neg\phi$ הוא פסוק. מכיוון ש-$\phi_1,\ldots,\phi_n$ היא סידרת יצירה n האיברים הראשונים בסידרה $\phi_1,\ldots,\phi_n,\neg\phi$ מקיימים את הדרישה של סידרת יצירה. ברור שגם האיבר האחרון $\neg\phi$ של סידרה זאת מקיים את הדרישה של סידרת יצירה כי הוא השלילה של ϕ הנמצא בין המחרוזות $\phi_1,\ldots,\phi_n$ שלפניו בסידרה $\phi_1,\ldots,\phi_n,\neg\phi$.

ג. אם ϕ ו-ψ הם פסוקים אז הם איברים ϕ_i ו-ψ_j בסדרות יצירה מתאימות $\phi_1,\ldots,\phi_n$ ו- $\psi_1,\ldots,\psi_m$. נראה כי הסידרה $\phi_1,\ldots,\phi_n,\psi_1,\ldots,\psi_m,\phi\Box\psi$, שנסמנה ב-$s$, היא סידרת יצירה, ולכן $\phi\Box\psi$ הוא פסוק. מכיוון ש- $\phi_1,\ldots,\phi_n$ היא סידרת יצירה לכן כל איבר של הרישא $\phi_1,\ldots,\phi_n$ של s הוא פסוק יסודי או שהוא מתקבל מאיברים קודמים של הרישא $\phi_1,\ldots,\phi_n$, ולכן של s, ע"י קשר דו-מקומי יסודי. מכיוון ש- $\psi_1,\ldots,\psi_m$ היא סידרת יצירה לכן כל איבר של הקטע $\psi_1,\ldots,\psi_m$ של s הוא פסוק יסודי או שהוא מתקבל מאיברים קודמים של אותו קטע, ולכן של s, ע"י קשר דו-מקומי יסודי. לבסוף, האיבר האחרון $\phi\Box\psi$ של s מתקבל מן האיברים הקודמים ϕ_i ו-ψ_j של s ע"י הקשר $\Box$.

2.7 אינדוקציה מלאה. מוכרת לנו עוד מבית הספר התיכון האינדוקציה השלמה. באינדוקציה זאת, אם **ת** היא תכונה של מספרים כך ש-1 הוא בעל התכונה **ת**, ולכל מספר n, אם n הוא בעל התכונה **ת** אז גם $n+1$ הוא בעל התכונה **ת**, אז כל מספר טבעי חיובי הוא בעל התכונה **ת**. כאן נשתמש גם בצורה אחרת של האינדוקציה והיא האינדוקציה המלאה, שניסוחה הוא כדלקמן. תהי **ת** תכונה של מספרים כך שלכל מספר טבעי חיובי n, אם כל המספרים הטבעיים החיוביים הקטנים מ-n הם בעלי התכונה **ת** אז גם n הוא בעל התכונה **ת**. בהנחות אלו על התכונה **ת** כל מספר טבעי חיובי הוא בעל התכונה **ת**.

הערות. א. כמובן שאפשר להתחיל גם את האינדוקציה השלמה, וגם את האינדוקציה המלאה, מ-0 במקום מ-1.

ב. עקרון האינדוקציה המלאה הוא, מבחינה אינטואיטיבית, חזק יותר מן האינדוקציה השלמה, כי עקרון האינדוקציה המלאה דורש דרישה חלשה יותר מן התכונה **ת** מאשר עקרון האינדוקציה השלמה ובכל זאת הוא מגיע לאותה מסקנה. עקרון האינדוקציה השלמה דורש שאם $n-1$ הוא בעל התכונה **ת** אז גם n הוא בעל התכונה **ת**, ואילו עקרון האינדוקציה המלאה דורש מ-n להיות בעל התכונה **ת** רק כאשר כל הטבעיים החיוביים הקטנים ממנו, ולא רק $n-1$, הם בעלי התכונה **ת**.

ג. על פניו נראה שבעקרון האינדוקציה המלאה אנו מצליחים להתחמק מן הדרישה ש-1 הוא בעל התכונה **ת**, ולא היא. הדרישה של עקרון האינדוקציה המלאה שאם כל המספרים הטבעיים החיוביים הקטנים מ-n הם בעלי התכונה **ת** אז גם n הוא בעל התכונה **ת** דורשת במקרה של $n=1$ ש-1 הוא בעל התכונה **ת**, מכיוון שהטענה שכל המספרים הטבעיים החיוביים הקטנים מ-1 הם בעלי התכונה **ת** היא תמיד נכונה באופן ריק כי אין מספרים כאלו.

ד. למרות האמור ב-ב' לעיל אפשר להוכיח את עקרון האינדוקציה המלאה מעקרון האינדוקציה השלמה כדלקמן. מניחים את דרישת עקרון האינדוקציה המלאה, כלומר שהתכונה **ת** היא כזאת שלכל מספר טבעי חיובי n, אם כל המספרים הטבעיים החיוביים הקטנים מ-n הם בעלי התכונה **ת** אז גם n הוא בעל התכונה **ת**. כעת מוכיחים באינדוקציה שלמה על n שכל המספרים הטבעיים החיוביים הקטנים מ-n הם בעלי התכונה **ת**. מכיוון שזה נכון לכל מספר טבעי n אז כל המספרים הטבעיים הם בעלי התכונה **ת**.

ה. עקרון האינדוקציה המלאה שקול ישירות לעקרון המינימום והוא שבכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים חיוביים יש מספר מזערי. מוכיחים כל אחד משני העקרונות הללו ע"י שמפעילים את העיקרון השני על השלילה של התכונה **ת**.

2.8 הוכחה באינדוקציה על יצירת הפסוק. תהי **ת** תכונה של מחרוזות המקיימת את שלושת התנאים הבאים:

א. כל פסוק יסודי הוא בעל התכונה **ת**.

ב. לכל פסוק ϕ, אם ϕ הוא בעל התכונה **ת** אז גם $\neg\phi$ הוא בעל התכונה **ת**.

ג. לפסוקים ϕ, ψ כלשהם, אם ϕ ו-ψ הם בעלי התכונה **ת** אז לכל קשר דו-מקומי $\square$, גם הפסוק $\phi\square\psi$ הוא בעל התכונה **ת**.

אז כל פסוק הוא בעל התכונה **ת**.

הוכחה. יהי ϕ פסוק כלשהו, ותהי $\phi_1, \ldots, \phi_k$ סידרת יצירה של ϕ. נוכיח באינדוקציה מלאה על n כי לכל $1 \leq n \leq k$ ϕ_i הוא בעל התכונה **ת**. כתוצאה מכך, ומכיוון ש-ϕ הוא אחד ה-ϕ_n-ים, לכן ϕ הוא בעל התכונה **ת**. לשם כך נוכיח כי לכל $1 \leq n \leq k$ אם לכל $1 \leq i < n$ ϕ_i הוא בעל התכונה **ת**, כלומר אם כל הקודמים ל-ϕ_n בסידרת היצירה הם בעלי התכונה **ת**, אז גם ϕ_n הוא בעל התכונה **ת**, ונוכיח כי גם ϕ_n הוא בעל התכונה **ת**. נניח אם כן כי $1 \leq n \leq k$ הוא כזה שכל הקודמים ל-ϕ_n בסידרת היצירה הם בעלי התכונה **ת**. מכיוון ש- $\phi_1, \ldots, \phi_k$ היא סידרת יצירה קיימת אחת משלוש האפשרויות הבאות:

א. ϕ_n הוא פסוק יסודי. אז ϕ_n הוא בעל התכונה **ת** לפי תנאי א' דלעיל.

ב. ϕ_n הוא $\neg\phi_i$ עבור $1 \leq i < n$ כלשהו. אז לפי הנחתנו על n ϕ_i הוא בעל התכונה **ת**. לפי תנאי ב' דלעיל גם $\phi_n = \neg\phi_i$ הוא בעל התכונה **ת**.

ג. ϕ_n הוא $\phi_j\square\phi_n$ עבור $1 \leq j, k < i$ כלשהם, וקשר דו-מקומי $\square$ כלשהו. אז לפי הנחתנו על i ϕ_j ו-ϕ_k הם בעלי התכונה **ת**. לפי תנאי ג' דלעיל גם $\phi_n = \phi_j\square\phi_k$ הוא בעל התכונה **ת**.

כך ראינו שבכל מקרה ϕ_n הוא בעל התכונה **ת**, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה המלאה, ולפי עקרון האינדוקציה המלאה כל ϕ_n, עבור $1 \leq n \leq k$, הוא בעל התכונה **ת**.

הקריאה היחידה של הפסוקים. תכונה חיונית של התחביר היא תכונת הקריאה היחידה, והיא שכל פסוק ניתן לקריאה באופן אחד בלבד. בהקשר הנוכחי המשמעות של "קריאה" היא "ניתוח תחבירי" כלומר הידיעה מהם הרכיבים מהם מתקבל הפסוק וכיצד הוא מתקבל מהם. קריאה יחידה אינה קיימת בדרך כלל בשפות טבעיות. למשל את הפסוק "אבנים שחקו מים" (איוב י"ד, י"ט) אפשר לקרוא בשתי דרכים. הדרך האחת היא שהנושא הוא "מים" והמובן הוא שהמים שחקו את האבנים, והשניה היא שהנושא הוא "אבנים" והמובן הוא שהאבנים שחקו את המים. בדוגמה זאת ברור מן המשמעות באילו משתי דרכים אלו יש לקרוא את הפסוק, אבל לשם כך אנו כבר נזקקים לסמנטיקה, כלומר למשמעות המילים בפסוק, ואיננו יכולים לדעת זאת מן התחביר בלבד, כלומר ממבנה הפסוק בלבד. יש גם דוגמאות מרובות לפסוקים בעברית שגם הסמנטיקה אינה קובעת באפן חד משמעי כיצד לקרוא ולהבין אותם. למשל במשפט "ראיתי את פרת דודתי השמנה" לא ברור אם הכונה לפרה השמנה של הדודה או לפרה של הדודה השמנה.

כאשר הצגנו לעיל את הקשרים היסודיים אמרנו כי הפעלת הפעולה הדו-מקומית $\square$ על המחרוזות ϕ ו-ψ נותנת מחרוזת מסויימת שבדרך כלל היא אחת המחרוזות $\phi \blacksquare \psi$ או $(\phi)\blacksquare(\psi)$ או $(\phi \blacksquare \psi)$, ועד עתה לא היה חשוב לנו לדעת מהי המחרוזת המתקבלת. כעת כשמדובר בקריאה יחידה חשוב לנו לדעת מהי המחרוזת המתקבלת וחשוב לנו להבין את התיפקוד של הסוגרים בה. למשל, אילו השתמשנו בסוגרים לתפקיד תחבירי בעברית היינו מבחינים בין שתי אפשרויות הניתוח של "פרת דודתי השמנה" ע"י שהיינו כותבים "(פרת דודתי) השמנה" או "פרת (דודתי השמנה)". ישנן מספר דרכים להגדיר את המחרוזות המתקבלות ע"י הקשרים הפסוקיים היסודיים כך שמתקבלת קריאה יחידה של פסוקים, חלקן בעזרת סוגרים וחלקן ללא עזרת סוגרים. יותר קל לבני אדם לקרוא פסוקים המשתמשים בסוגרים ולכן ההגדרה המסויימת שנביא בהמשך תהיה כזאת המשתמשת בסוגרים. פרט לשיקול של נוחיות אין לדרך בה ננקוט כאן עדיפות על כל דרך אחרת, והמשך העיסוק שלנו בלוגיקה אינו תלוי בה בכלל.

2.9 הקשרים הפסוקים היסודיים. א. לכל סימן קשר $\blacksquare$ מבין הסימנים $\boldsymbol{\wedge}, \boldsymbol{\vee}, \boldsymbol{\rightarrow}$ הקשר הדו מקומי המתאים הוא הפעולה על המחרוזות ϕ, ψ הנותנת את המחרוזת $(\phi \blacksquare \psi)$.

ב. קשר השלילה הוא הפעולה החד מקומית על המחרוזת ϕ הנותנת את המחרוזת $\boldsymbol{\neg}\phi$.

2.10 מסקנה. מהגדרת הקשרים ב-2.9 ומהגדרת מושג הפסוק ב-2.4 נובע מייד כי כל פסוק ϕ הוא בעל אחת הצורות א'-ג' הבאות:

א. ϕ הוא מחרוזת באורך 1, והוא פסוק יסודי.
ב. ϕ הוא $\neg\psi$, היכן ש-ψ פסוק הנקבע באופן יחיד ע"י ϕ, כי הוא המחרוזת ϕ בהשמטת סימנה הראשון $\neg$.
ג. ϕ הוא $\chi\square\psi$, היכן ש- χ, ψ פסוקים.

כדי לדעת לקרוא את הפסוקים עלינו לדעת תחילה מספר עובדות פשוטות על סוגרים. כאשר אנו כותבים ביטוי עם סוגרים כל סוגר ימני אמור להתאים לסוגר שמאלי המופיע לפניו, כך שלסוגרים ימניים שונים מתאימים סוגרים שמאליים שונים. לכן, כאשר אנו עוברים על ביטוי משמאל לימין, בכל שלב מספר הסוגרים הימניים שעברנו עליהם אינו צריך לעלות על מספר הסוגרים השמאליים שעברנו עליהם, כי אחרת יהיה בביטוי סוגר ימני ללא סוגר שמאלי מתאים.

2.11 הגדרה. מחרוזת נקראת **מאוזנת** (מבחינת הסוגרים) אם בכל רישא שלה מספר הסוגרים הימניים אינו עולה על מספר הסוגרים השמאליים, ובמחרוזת כולה מספר הסוגרים הימניים שווה למספר הסוגרים השמאליים.

2.12 למה. א. כל מחרוזת ללא סוגרים הוא מאוזנת.
ב. צירוף של מחרוזות מאוזנות הוא מחרוזת מאוזנת.
ג. אם ϕ מחרוזת מאוזנת אז גם (ϕ) הוא מחרוזת מאוזנת, ואף רישא ממש שלה אינה מאוזנת.

הוכחה. למחרוזת ϕ נסמן ב-$l(\phi)$ את מספר הסוגרים השמאליים ב-ϕ (l הוא קיצור של left) וב-$r(\phi)$ את מספר הסוגרים הימניים ב-ϕ (r הוא קיצור של right).

ב. ברור שדי להוכיח זאת לצירוף של שתי מחרוזות כי צירוף כללי מתקבל מחזרה על צירופים של שתי מחרוזות. יהיו ϕ, ψ מחרוזות מאוזנות. לכן קיים $l(\phi) = r(\phi)$ ו- $l(\psi) = r(\psi)$. מכאן נובע $l(\phi\psi) = l(\phi) + l(\psi) = r(\phi) + r(\psi) = r(\phi\psi)$. עתה, תהי χ רישא של $\phi\psi$. לכן χ היא רישא של ϕ או שקיימת רישא ρ של ψ כך ש- $\chi = \phi\rho$. אם χ היא רישא של ϕ אז מכיוון ש-ϕ היא מאוזנת קיים $l(\chi) \geq r(\chi)$. אם $\chi = \phi\rho$, כאשר ρ רישא של ψ אז מכיוון ש-ψ מאוזנת קיים $l(\rho) \geq r(\rho)$ ולכן $l(\chi) = l(\phi) + l(\rho) \geq r(\phi) + r(\rho) = r(\chi)$.

ג. היות ו-ϕ מאוזנת קיים $l(\phi) = r(\phi)$ ולכן $l((\phi)) = l(\phi) + 1 = r(\phi) + 1 = r((\phi))$. תהי χ רישא ממש של (ϕ) אז $\chi = (\rho$ כאשר ρ היא רישא, אולי ריקה, של ϕ ומכיוון ש-ϕ מאוזנת קיים $l(\chi) = 1 + l(\rho) > l(\rho) \geq r(\rho) = r(\chi)$.

2.13 תרגיל. א. תהי $\phi\psi$ מחרוזת מאוזנת. אם אחד משתי המחרוזות ϕ ו-ψ מאוזנת אז גם השניה מאוזנת.
ב. נסח תנאי לכך שמחרוזת היא מאוזנת שהוא דומה ל- 2.12 אבל הוא מתייחס למספרי הסוגרים בסיפאות של המחרוזת במקום למספרי הסוגרים ברישאות. הוכח שתנאי זה מתקיים אםם המחרוזת היא מאוזנת.
ג. אם ϕ היא מחרוזת מאוזנת אז אף סיפא של (ϕ), פרט ל-(ϕ) עצמה, אינה מחרוזת מאוזנת.

2.14 תרגיל. תהי $a_1 \ldots a_n$ מחרוזת, יהי a_j סוגר שמאלי ויהי $k > j$ כך ש-a_k סוגר ימני. אנו אומרים ש-a_k הוא **הסוגר הימני המתאים** ל-a_j אם k הוא המספר המזערי כך ש- $k > j$, a_k סוגר ימני ומספר הסוגרים השמאליים בקטע $a_{j+1} \ldots a_{k-1}$ שבין a_j ל-a_k (היכול גם להיות ריק אם $k = j + 1$) שווה למספר הסוגרים הימניים בו. ברור מייד כי ל-a_j יש לכל היותר סוגר ימני אחד המתאים לו.
א. במחרוזת מאוזנת יש לכל סוגר שמאלי סוגר ימני מתאים.
ב. במחרוזת מאוזנת כל סוגר ימני מתאים לסוגר שמאלי כלשהו.
ג. בכל מחרוזת, סוגר ימני מתאים לכל היותר לסוגר שמאלי אחד.
ד. אם ϕ היא מחרוזת בה כל הסוגרים נמצאים בזוגות מתאימים, כלומר בזוגות כך שכל זוג מכיל סוגר שמאלי וסוגר ימני מתאים לו, אז ϕ היא מאוזנת.

2.15 משפט. כל פסוק הוא מאוזן.

הוכחה. באינדוקציה על היצירה של הפסוק.
בפסוק יסודי אין סוגרים ולכן הוא מאוזן (2.12א').
אם ϕ פסוק, אז הוא מאוזן, לפי הנחת האינדוקציה. המחרוזת $\neg$ היא מאוזנת כי אין בה סוגרים. לכן, לפי 2.12ב' הצירוף $\neg\phi$ של המחרוזות המאוזנות $\neg$ ו-ϕ הוא מאוזן.
יהיו ϕ, ψ פסוקים שהם מאוזנים לפי הנחת האינדוקציה. כל סימן קשר דו מקומי $\square$ הוא מאוזן כי אין בו

סוגרים. לכן הצירוף $\psi\blacksquare\phi$ הוא מאוזן לפי 2.12ב', ולפי 2.12ג' גם הפסוק $(\psi\blacksquare\phi)$, שהוא $\psi\square\phi$, הוא מאוזן.

2.16 למה. אף רישא ממש של פסוק אינה פסוק.

הוכחה. נוכיח זאת באינדוקציה על יצירת הפסוק.

לפסוק יסודי אין רישא ממש.

לפסוק שצורתו $(\psi\blacksquare\phi)$, היכן ש-ϕ ו-ψ פסוקים, מכיוון שפסוקים אלו מאוזנים ו-$\blacksquare$ מאוזן לכן, לפי 2.12ב' $\psi\blacksquare\phi$ מאוזן, ולפי 2.12ג' כל רישא ממש של $(\psi\blacksquare\phi)$ אינה מאוזנת, לכן, לפי 2.15, היא אינה פסוק.

לפסוק שצורתו $\phi\neg$, היכן ש-ϕ פסוק, כל רישא ממש היא בעלת הצורה $\neg$, או בעלת הצורה $\psi\neg$ היכן ש-ψ הוא רישא ממש של ϕ. ברור ש-$\neg$ אינו פסוק. אילו היתה $\psi\neg$ פסוק אז, לפי 2.10, גם ψ היתה פסוק, וזה בניגוד להנחת האינדוקציה שאף רישא ממש של ϕ אינה פסוק.

2.17 משפט הקריאה היחידה. כל פסוק ϕ הוא בעל אחת ורק אחת מבין הצורות הבאות:

א. ϕ הוא פסוק יסודי.

ב. ϕ הוא $\psi\neg$ עבור פסוק ψ יחיד.

ג. ϕ הוא $\chi\square\psi$ עבור פסוקים χ, ψ יחידים וקשר יסודי דו-מקומי $\square$ יחיד.

הוכחה. מעבר למה שנמצא ב-2.10 עלינו להוכיח רק שאם ϕ הוא $(\chi\blacksquare\psi)$ עבור פסוקים χ, ψ וסימן קשר דו-מקומי $\blacksquare$ אז פסוקים אלו וסימן הקשר הם יחידים, כלומר אם גם $\phi = (\psi'\bullet\chi')$ עבור פסוקים ψ', χ' וסימן קשר דו-מקומי $\bullet$ אז $\psi' = \psi$, $\chi' = \chi$ ו- $\bullet = \blacksquare$. תחילה נוכיח כי $\psi' = \psi$. גם ψ וגם ψ' הם קטעים ב-ϕ המתחילים בסימן השני ב-ϕ. נראה כי ψ ו-ψ' הם באותו אורך ולכן הם, כמובן, שווים. אם אינם באותו אורך נניח שקראנו בשם ψ לקצר בין השניים, ואז, מכיון ששניהם קטעים של ϕ המתחילים באותו מקום, ψ הוא רישא ממש של ψ', וזה בסתירה לאמור ב-2.16 שרישא ממש של פסוק אינה פסוק. כך הוכחנו את $\psi' = \psi$.

יהי k האורך של ψ, ולכן גם של ψ'. מכיוון ש- $\phi = (\psi\blacksquare\chi) = (\psi'\bullet\chi')$ לכן גם $\blacksquare$ וגם $\bullet$ הם הסימן במקום ה-$k+2$ ב-ϕ, ולכן $\bullet = \blacksquare$. כמו כן, גם χ וגם χ' הוא הקטע של ϕ המשתרע מן המקום ה-$k+3$ ועד המקום שלפני האחרון ב-ϕ ולכן $\chi' = \chi$.

משפט הקריאה היחידה אומר לנו שכל פסוק הוא בעל אחת משלוש הצורות המנויות בו, ובצורות השניה והשלישית הוא מתקבל מפסוקים מסויימים ע"י קשר. כאן המקום לשאול אם מדובר כאן במשפט קיום מופשט, או שכאשר נתון פסוק אז אפשר לברר, ע"י בדיקה מתאימה, מהי צורת הפסוק, ואם למשל הוא בעל הצורה $\chi\square\psi$ האם אפשר לברר ע"י בדיקה מתאימה מהם הפסוקים ψ ו-χ? שאלה זאת קשורה באופן הדוק לשאלה האם כאשר נתונה מחרוזת אנו יכולים לברר אם היא פסוק או לא. נראה כי התשובה לכל השאלות הללו היא חיובית, ונוכיח שקיים אלגוריתם, כלומר תהליך חישוב, העונה נכונה על כל אחת משאלות אלו.

2.18 משפט כריעות מושג הפסוק והקריאה היחידה האלגוריתמית. קיים אלגוריתם, שנקרא לו **אלגוריתם הניתוח**, שכאשר הוא מופעל על מחרוזת הוא מודיע אם המחרוזת היא פסוק או לא, ואם היא פסוק הוא מודיע אם היא פסוק יסודי, או אם היא מהצורה $\psi\neg$ ואז הוא מודיע מהו ψ, או אם היא מהצורה $\chi\square\psi$ ואז הוא מודיע מהם $\square$, ψ ו-χ.

הוכחה. האלגוריתם שנתאר הוא אלגוריתם רקורסיבי, כלומר כאשר הוא מופעל על מחרוזת באורך n הוא משתמש במהלך החישוב באלגוריתם זה עצמו כשהוא מופעל על מחרוזות קצרות יותר. נגדיר עתה את האלגוריתם, כשהוא מופעל על מחרוזת ϕ באורך n ויחד עם ההגדרה נוכיח שהאלגוריתם נותן את התשובה הנכונה אחרי מספר סופי של צעדים. כהנחת אינדוקציה, של האינדוקציה המלאה, נניח שכאשר האלגוריתם מופעל על מחרוזות שאורכן קטן מאורך ϕ הוא נותן את התשובה הנכונה אחרי מספר סופי של צעדים.

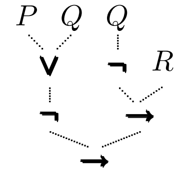
אם ϕ היא בת סימן אחד בלבד אז אם סימן זה הוא פסוק יסודי אז ϕ היא פסוק, והיא פסוק יסודי. אם סימן זה איננו פסוק יסודי אז ϕ אינה פסוק כי כל פסוק המתקבל ע"י קשר אורכו גדול מ-1.

אם אורך ϕ גדול מ-1 קיימות שלוש אפשרויות:

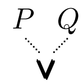
א. הסימן הראשון של ϕ אינו $\neg$ ואינו סוגר שמאלי. במקרה זה ϕ אינו פסוק יסודי ואינו מתקבל ע"י קשר,

כי הפסוקים המתקבלים ע"י קשרים מתחילים ב- $\neg$ או בסוגר שמאלי. לכן ϕ אינו פסוק.
ב. הסימן הראשון של ϕ הוא $\neg$. במקרה זה נסמן ב-ψ את המחרוזת המתקבלת מ-ϕ ע"י השמטת סימנה הראשון. כעת נפעיל את האלגוריתם עצמו על ψ. לפי הנחת האינדוקציה הוא נותן אחרי מספר סופי של צעדים תשובה נכונה אם ψ הוא פסוק או לא. אם התקבלה התשובה ש-ψ הוא פסוק האלגוריתם יענה ש-ϕ הוא פסוק, ותשובה זאת נכונה כי שלילת פסוק היא פסוק, והאלגוריתם יציג את ψ כפסוק ממנו מתקבל ϕ ע"י קשר השלילה. אם התקבלה התשובה ש-ψ אינו פסוק האלגוריתם יענה ש-ϕ אינו פסוק, ותשובה זאת נכונה כי מחרוזת המתחילה ב- $\neg$ יכולה להיות פסוק רק אם היא מהצורה $\neg\rho$ היכן ש-ρ הוא פסוק, וידוע לנו שהשמטת הסימן הראשון של ϕ נותנת מחרוזת שאינה פסוק.
ג. הסימן הראשון של ϕ הוא סוגר שמאלי. במקרה זה ϕ היא פסוק אםם היא מתקבלת ע"י קשר דו מקומי, ואז צורתה היא $(\chi \blacksquare \psi)$, והסימן האחרון של ϕ הוא סוגר ימני. נסמן ב-σ את ϕ בהשמטת סימניה הראשון והאחרון, כלומר אם ϕ היא $(\chi \blacksquare \psi)$ אז σ היא $\chi \blacksquare \psi$. מכיוון שפסוק אחד אינו רישא ממש של פסוק שני אז יש ל-σ לכל היותר רישא אחת שהיא פסוק, ואם ϕ היא $(\chi \blacksquare \psi)$ אז רישא זאת היא ψ, הסימן העוקב ל-σ הוא סימן הקשר $\blacksquare$, והמחרוזת χ המתקבלת מ-σ ע"י השמטת ψ ו-$\blacksquare$ גם היא פסוק. במיוחד ברור שאורך ψ קטן לפחות ב-2 מאורך σ. לכן נקבע שהאלגוריתם יעשה את הצעדים הבאים. אם הסימן האחרון של ϕ אינו סוגר ימני האלגוריתם יענה ש-ϕ אינו פסוק. אם הסימן האחרון של ψ הוא סוגר ימני נסמן ב-σ_i את הרישא של σ שאורכה i. האלגוריתם יפעיל את עצמו לפי הסדר על $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k-2}$, היכן ש-$k$ הוא אורך σ. מכיוון שכל אחת ממחרוזות אלו היא קצרה מ-ϕ, האלגוריתם יענה אחרי מספר סופי של צעדים תשובה נכונה אם σ_i הוא פסוק או לא. אם אף אחת ממחרוזות אילו אינה פסוק אז האלגוריתם יענה ש-ϕ אינה פסוק. אם האלגוריתם יקבל ש-σ_j היא פסוק הוא יראה אם הסימן העוקב לה הוא אחד מסימני הקשרים $\wedge, \vee, \to$. אם הסימן העוקב אינו אחד מאלו אז ϕ אינה פסוק. אם הסימן העוקב הוא סימן קשר כנדרש האלגוריתם יפעיל את עצמו על הקטע ρ של σ המשתרע מן הסימן ה-$j+2$ עד הסימן האחרון. מכיוון ש-ρ קצר מ-ϕ האלגוריתם יתן את התשובה הנכונה אחרי מספר סופי של צעדים. אם ρ אינה פסוק האלגוריתם יענה ש-ϕ אינו פסוק. אם ρ היא פסוק האלגוריתם יענה ש-ϕ היא פסוק והוא מתקבל מ-σ_j ומ-ρ ע"י הקשר שסימנו הוא הסימן ה-$j+1$ ב-σ.

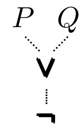
2.19 אחרי שסיימנו את כל העבודה הטכנית הקשורה במשפט הקריאה היחידה ובאלגוריתם הניתוח נתבונן בעניין בצורה כללית יותר. כדי להגדיר את הפסוקים ולהגיע למשפט הקריאה היחידה לא היינו חייבים להשתמש בסוגרים אלא יכולנו להחליף את החלק של 2.9 העוסק בקשרים הדו-מקומיים בהגדרה שתוצאת הפעלת הקשר $\square$ על המחרוזות ϕ, ψ היא המחרוזת $\blacksquare\phi\psi$, כלומר את סימן הקשר אנו שמים לפני המחרוזות עליהם הוא פועל. צורת כתיבת הפסוקים המתקבלת בדרך זאת נקראת **צורת הכתיבה הפולנית**, לא משום שצורת כתיבה זאת מקובלת בפולין אלא משום שהיא הוצעה לראשונה ע"י הלוגיקאי הפולני לוקאשביץ'. בנוסף על צורת כתיבה זאת קיימות דרכים להגדרת הפסוקים עם סוגרים השונות מן הדרך בה אנו נקטנו כאן. ברור כבר עתה, ועוד יותר יהיה ברור בהמשך, שההבדלים בין דרך אחת לשניה הם טכניים בלבד ושהמושג המתמטי של הפסוק אינו תלוי בבחירה של דרך זאת או אחרת. מהו הייצוג הטוב ביותר של המושג המתמטי של הפסוק? נראה שהייצוג הטוב ביותר למושג הפסוק מתקבל ע"י עצים. לא ניכנס לדיון מפורט בייצוג זה, כי העיסוק בו לא יביא לתוצאות מתמטיות חדשות, ולכן נסתפק כאן בדוגמא. נתבונן בפסוק "אם לא (P או Q) אז אם (לא Q) אז R". לפי 2.9 אנו כותבים פסוק זה בצורה $((\neg(P \vee Q)) \to ((\neg Q) \to R))$, ובצורת הכתיבה הפולנית הוא $\to \neg \vee PQ \to \neg QR$. הצגתו בצורת עץ נמצאת בטבלה 1 ונסביר את ההצגה הזאת. בצידו השמאלי העליון של העץ נמצא העץ של טבלה 2. עץ זה הוא הייצוג של "P או Q" כי בתחתיתו נמצא סימן הקשר $\vee$ הפועל על הפסוקים P ו-Q הנמצאים מעליו. העץ בטבלה 3 מייצג את הפסוק "לא (P או Q)" כי בתחתיתו נמצא סימן השלילה ומעליו העץ של טבלה 2. העץ בטבלה 4 מייצג את "לא Q" כי בתחתיתו נמצא סימן השלילה הפועל על Q שמעליו. בעץ שבטבלה 5 נמצא בתחתית סימן האימוז $\to$ הפועל על העץ של טבלה 4 ועל R, ולכן הוא מייצג את הפסוק "אם (לא Q) אז R". בעץ שבטבלה 1 נמצא בתחתית סימן הקשר $\to$ ומעליו העצים של טבלה 3 וטבלה 5, ולכן הוא מייצג את האימוז של הפסוקים המתאימים לטבלאות אלו כלומר את הפסוק "אם לא (P או Q) אז אם (לא Q) אז R".



טבלה 1

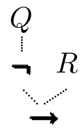


טבלה 2



טבלה 3

טבלה 4



טבלה 5

@ @

מנקודת ראות עקרונית היינו צריכים להגדיר את הפסוקים כעצים. אילו עשינו זאת אז גם משפט הקריאה היחידה היה טריביאלי, כי כל פסוק שאינו פסוק יסודי מתקבל ע"י הקשר שבתחתיתו מן הפסוק או שני הפסוקים הנשארים אחרי השמטת סימן קשר זה, ולא משום פסוקים אחרים. איננו מגדירים את הפסוקים כעצים מסיבות של הנדסת אנוש והנדסת מחשבים. אנחנו כבני אדם רגילים לשפה הכתובה באופן לינארי, כלומר כסידרה של סימנים, ולא באמצעות עצים. גם המידע במחשב מאורגן באופן לינארי בקבצים והמחשבים אינם בנויים לטפל ישירות בעצים. מה שעשינו בהגדרת הקשרים והפסוקים הוא שמצאנו דרך לייצג את העצים ע"י מחרוזות. אם נתבונן בדיון שלנו בסוגרים ובמשפט הקריאה היחידה במשקפיים כלליות יותר, יתברר שזהו מקרה פרטי של הדיון הכללי בייצוג עצים ע"י מחרוזות, והטירחה שהיינו צריכים לטרוח היא הטירחה האופיינית לייצוג עצים כלשהם ע"י מחרוזות.

2.20 תרגיל. בצורת הכתיבה הפולנית הקשרים מוגדרים ע"י $\boldsymbol{\neg}\phi = \neg\phi$ ולכל קשר פסוקי יסודי דו-מקומי $\Box$ $\boldsymbol{\Box}\phi\psi = \phi\Box\psi$. הוכח כי:

א. רישא ממש של פסוק אינה פסוק. רמז: הוכח זאת באינדוקציה על אורך הפסוק.

ב. קיים משפט הקריאה היחידה.

ג. נשנה את הגדרת הקשרים הפסוקיים היסודיים ב-2.9א' כך ש- $\phi\Box\psi$ יהיה $\boldsymbol{\Box}(\phi)(\psi)$ ו- $\neg\phi$ יהיה $\boldsymbol{\neg}(\phi)$. הוכח שגם עבור הגדרה זאת של הקשרים הפסוקיים היסודיים קיימים א' ו-ב'.

2.21 השמטת סוגרים. כשאנו כותבים, למשל, $(\phi\Box\psi)\circ\chi$ איננו מתכוונים לכך שבמחרוזת המתקבלת מו-פיעים סוגרים (ואם אנו נשתמש בצורת הכתיבה הפולנית אז לא מופיעים סוגרים), אלא אנו מתכוונים לכך שתחילה אנו מפעילים את הקשר $\Box$ על הפסוקים ϕ, ψ ואז אנו מפעילים את הקשר $\circ$ על הפסוק המתקבל ועל χ. לכן נקבע, כמקובל במתמטיקה, כללים שיאפשרו לנו להשמיט חלק מן הסוגרים מבלי שתיפגע הבנתנו באשר לסדר ההפעלה של הקשרים.

א. סדר הקדימות של הקשרים הוא שהראשון הוא $\wedge$, אחריו בא $\vee$, ואחריו, בקדימות שווה, באים $\rightarrow$ ו-$\leftrightarrow$ (היכן שאנו משתמשים ב- $\phi \leftrightarrow \psi$ כקיצור, למשל של $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$). אם $\circ$ בעל קדימות גבוהה מזו של $\Box$ (כלומר, $\circ$ בא לפני $\Box$ ברשימת הקדימות) אז $\phi \circ \psi\Box\chi$ הוא קיצור של $(\phi \circ \psi)\Box\chi$, ו-$\phi\Box\psi \circ \chi$ הוא קיצור של $\phi\Box(\psi \circ \chi)$. דוגמה לכך היא שהכפל הוא בעל קדימות גבוהה מזו של החיבור בביטויים אלגבריים. לכן נבין את $\phi \vee \psi \wedge \chi$ כ- $\phi \vee (\psi \wedge \chi)$, ואת $\phi \vee \psi \leftrightarrow \chi \wedge \rho$ כ- $(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\chi \wedge \rho)$.

ב. גימום של סידרת פסוקים $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n$ מובן כ- $(\ldots((\phi_1 \wedge \phi_2) \wedge \phi_3) \wedge \ldots \wedge \phi_{n-1}) \wedge \phi_n$, וכן אווי של סידרת פסוקים $\phi_1 \vee \phi_2 \vee \ldots \vee \phi_n$ מובן כ- $(\ldots((\phi_1 \vee \phi_2) \vee \phi_3) \vee \ldots \vee \phi_{n-1}) \vee \phi_n$, במיוחד $\phi \wedge \psi \wedge \chi$ מובן כ- $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi$ ו- $\phi \vee \psi \vee \chi$ מובן כ- $(\phi \vee \psi) \vee \chi$.

שני כללי קיצור אלו אינם כל כללי קדימות הפעולות האפשריים, אבל אלו הם הכללים המקובלים בלוגיקה, ועדיף לא להשתמש בכללי השמטת סוגרים נוספים מכיוון שהם אינם ידועים לכולם.

2.22 הגדרה. פסוק ψ נקרא **רכיב** של פסוק ϕ אם $\phi = \neg\psi$ או אם $\phi = \psi\Box\chi$ או $\phi = \chi\Box\psi$ עבור פסוק χ כלשהו, וקשר פסוקי בסיסי $\Box$ כלשהו.

לפי משפט הקריאה היחידה אם $\phi = \neg\psi$ אז ψ הוא הרכיב היחיד של ϕ, ואם $\phi = \psi\Box\chi$ אז ψ ו-χ הם הרכיבים היחידים של ϕ.

2.23 תרגיל הוכחה. פסוק ψ נקרא **תת פסוק** של פסוק ϕ אם ψ נמצא בכל סידרת יצירה המכילה את ϕ. נתבונן בסידרת יצירה המכילה את ϕ. הרישא שלה המסתיימת ב-ϕ גם היא סידרת יצירה המכילה את ϕ, ולכן אם ψ תת פסוק של ϕ אז הוא חייב להופיע בכל סידרת יצירה לפני הופעת ϕ (כמובן שיכולות להיות

ל-ψ הופעות נוספות אחרי ϕ).

א. כל פסוק הוא תת פסוק של עצמו.

ב. כל תת פסוק של ϕ הוא גם תת פסוק של $\neg\phi$.

ג. כל תת פסוק של ϕ וכל תת פסוק של ψ הוא תת פסוק של $\phi\square\psi$, לכל קשר דו-מקומי בסיסי $\square$.

ד. לכל פסוק ϕ ישנה סידרת יצירה שכל הפסוקים בה הם תתי פסוקים של ϕ.

הוכח זאת באינדוקציה על יצירת ϕ.

ה. כל תת פסוק של $\neg\phi$, פרט ל- $\neg\phi$ עצמו, הוא תת פסוק של ϕ.

רמז: הוכחת 2.6.

ו. כל תת פסוק של $\phi\square\psi$ פרט לפסוק עצמו הוא תת פסוק של ϕ או תת פסוק של ψ.

רמז: הוכחת 2.6.

ז. לכל פסוק ϕ, פסוק ψ הוא תת פסוק של ϕ אסם $\phi = \psi$ או ψ הוא תת פסוק של רכיב של ϕ.

ח. כל תת פסוק של ϕ הוא קטע של ϕ.

הוכח זאת באינדוקציה על יצירת ϕ.

ט. אילו מבין החלקים א'-ח' של תרגיל זה מתייחסים להצגה המסויימת של פסוקים כמחרוזות בה בחרנו בספר זה ואילו לא?

2.24 הצורך בהגדרה רקורסיבית. מדוע היה לנו חשוב להוכיח את משפט הקריאה היחידה? אנו נראה עתה כי קריאה יחידה של פסוקים מביאה לכך שלכל פסוק יש משמעות יחידה. בשפה טבעית אנו מנצלים לעיתים, כגון בכתיבת שירה, דווקא את הרב משמעותיות של פסוקים, אבל בשפה מתמטית חשוב לנו שלכל פסוק תהיה משמעות יחידה. לכן, גם אם כרגע לא נתנו הגדרה של מושג המשמעות של פסוק ברור לנו שנרצה להגדיר פונקציה F המוגדרת על קבוצת כל הפסוקים ושערכה $F(\phi)$ לפסוק ϕ הוא המשמעות של הפסוק ϕ. נתבונן למשל בפסוק מהצורה $\psi\vee\chi$. המשמעות של פסוק זה אינה מוגדרת באופן ישיר, אלא היא מתקבלת מן המשמעויות של הפסוקים ψ ו-χ. הוא הדין גם לפסוקים מהצורה $\neg\psi$, $\psi\wedge\chi$ וכיו"ב. לכן כאשר נבוא להגדיר את הפונקציה F הנותנת לכל פסוק את משמעותו נגדיר אותה בהגדרה רקורסיבית, כלומר לפסוקים שאינם פסוקים יסודיים לא נאמר במפורש מהו ערך הפונקציה על הפסוק אלא נאמר כיצד ערך זה מתקבל מן הערכים של הפונקציה על הרכיבים של הפסוק. המשפט הבא אומר לנו שהגדרות מסוג זה הן קבילות.

הצורך בהוכחת קיום הפונקציה F. נתבונן בפונקציה F אחרת המוגדרת ברקורסיה כדלקמן. $F(1) = 1$, ולכל k ו- l $F(k+l) = 2(F(k)+F(l))$. מתברר שאין פונקציה F המקיימת תנאים אלו. אילו היתה פונקציה כזאת אז ע"י חישוב $F(4)$ כ- $F(2+2)$ מתקבל $F(4) = 16$, וע"י חישוב $F(4)$ כ- $F(3+1)$ מתקבל $F(4) = 22$. וזה סותר את הנחת קיום פונקציה F כזאת. זה מראה שכדי שנדע שאומנם קיימת פונקציה המוגדרת ברקורסיה ההגדרה צריכה להיות במתכונת מסויימת. מתכונת כזאת מוצגת במשפט הבא, ורק למתכונת זאת נקרא הגדרה ברקורסיה על יצירת הפסוק.

2.25 משפט ההגדרה ברקורסיה של פונקציה על הפסוקים. נסמן ב-Π את קבוצת כל הפסוקים וב-Π_0 את קבוצת הפסוקים היסודיים. תהי W קבוצה כלשהי, תהיינה $G_0, G_\neg, G_\square$, לכל קשר דו-מקומי בסיסי $\square$, פונקציות נתונות, $G_0 : \Pi_0 \to W$, $G_\neg : W \to W$ ו- $G_\square : W \times W \to W$. קיימת פונקציה F יחידה שתחומה Π המקיימת:

(*)

א. לכל פסוק יסודי P $F(P) = G_0(P)$.

ב. לכל פסוק ψ $F(\neg\psi) = G_\neg(F(\psi))$.

ג. לכל קשר דו מקומי בסיסי $\square$ ופסוקים ψ, χ כלשהם $F(\psi\square\chi) = G_\square(F(\psi), F(\chi))$.

הסבר. הפונקציה F מוגדרת במפורש עבור הפסוקים היסודיים ע"י הפונקציה הנתונה G_0. עבור הפסוקים בעלי הצורה $\neg\psi$ הערך $F(\neg\psi)$ אינו מוגדר במפורש אלא הוא מתקבל מן הערך $F(\psi)$ ע"י הפונקציה הנתונה $G_\neg$. עבור הפסוקים בעלי הצורה $\psi\square\chi$ הערך $F(\psi\square\chi)$ אינו מוגדר במפורש אלא הוא מתקבל מן הערכים $F(\psi)$ ו- $F(\chi)$ ע"י הפונקציה הנתונה $G_\square$.

כאן ניסחנו את משפט ההגדרה ברקורסיה בצורה המתאימה לתחשיב הפסוקים. אנו נזדקק בהמשך גם למשפט המקביל לתחשיב היחסים. משפט ההגדרה ברקורסיה הוא משפט כללי במתמטיקה, וחשובה

במיוחד הרקורסיה על המספרים הטבעיים. אפשר לנסח ולהוכיח את המשפט הכללי, ולקבל את המשפט לתחשיב הפסוקים כמקרה פרטי שלו, אבל כאן העדפנו לנסח ולהוכיח אותו כאן רק עבור תחשיב הפסוקים כדי לא לחרוג מן הטיפול בתחשיב זה. עם זאת, כל הרעיון של הוכחת המשפט במקרה הכללי ביותר נמצא כבר בהוכחה שתובא, ומי שיבין את ההוכחה כאן יוכל להוכיח בנקל גם את המקרה הכללי.

הוכחה. נניח שאנו רוצים לחשב את $F(P\wedge\neg Q)$. עלינו לעשות זאת בעזרת השיוויונות $(*)$. ראשית, לפי $(*)$ג׳ קיים $F(P\wedge\neg Q)=G_\wedge(F(P),F(\neg Q))$. כדי לחשב את אגף ימין של שיוויון זה עלינו לחשב את $F(P)$ ואת $F(\neg Q)$. השיוויונות $(*)$א׳ ו-$(*)$ב׳ נותנים $F(P)=G_0(P)$ ו- $F(\neg Q)=G_\neg(F(Q))$. נותר לנו לחשב את $F(Q)$, ולפי השוויון $(*)$א׳ קיים $F(Q)=G_0(Q)$. אם נצרף יחד את כל השיוויונות שקיבלנו נקבל כי $F(P\wedge\neg Q)=G_\wedge(G_0(P),G_\neg(G_0(Q)))$. בשיוויון זה אגף ימין אינו מכיל את F ואפשר לחשב אותו בעזרת פונקציות G הנתונות.

הדוגמה שראינו של חישוב $F(P\wedge\neg Q)$ מצביעה על כך שבאותה הדרך אפשר לחשב את $F(\phi)$ לכל פסוק ϕ. כעת נוכיח זאת ובכך נבסס את העיקרון "אני ניתן לחישוב ולכן אני קיים". ההוכחה שנביא היא הכללה ישירה של החישוב שהדגמנו.

נחזור לחישוב של $F(P\wedge\neg Q)$. במהלך חישוב זה חישבנו את F לא רק עבור $P\wedge\neg Q$ אלא גם עבור P, Q ו- $\neg Q$. קבוצת הפסוקים שחישבנו את ערכי F שלהם היא לכן הקבוצה $\{P\wedge\neg Q,P,\neg Q,Q\}$. תכונה אופיינית של קבוצה זאת היא שלכל פסוק $\neg\psi$ שהיא מכילה היא מכילה גם את ψ, ולכל פסוק $\psi\Box\chi$ שהיא מכילה היא מכילה גם את ψ ו-χ. זה מביא אותנו להגדרה הבאה.

הגדרה. קבוצת פסוקים Γ נקראת **קבוצת יצירה** אם לכל $\phi\in\Gamma$ G מכילה גם את הרכיבים של ϕ.

פונקציה H נקראת **חישוב** אם תחומה הוא קבוצת יצירה ו-H מקיימת בתחומה את השיוויונות $(*)$, כלומר לכל פסוק יסודי $P\in\mathrm{Dom}H$ קיים $H(P)=G_0(P)$, לכל פסוק $\neg\psi\in\mathrm{Dom}H$ קיים $H(\neg\psi)=G_\neg(H(\psi))$ ולכל פסוק $\psi\Box\chi\in\mathrm{Dom}H$ קיים $H(\psi\Box\chi)=G_\Box(H(\psi),H(\chi))$.

נדגיש שמכיוון ש- $\mathrm{Dom}(H)$ היא קבוצת יצירה אז אם $\neg\psi\in\mathrm{Dom}H$ אז גם $\psi\in\mathrm{Dom}H$ ואם $\psi\Box\chi\in\mathrm{Dom}H$ אז גם $\psi,\chi\in\mathrm{Dom}H$.

חישוב לפסוק ϕ הוא חישוב שתחומו מכיל את ϕ.

למה א׳. כל שני חישובים הם מתיישבים כלומר הם נותנים את אותו הערך לכל פסוק הנמצא בחיתוך תחומיהם.

הוכחה. יהיו H_1 ו-H_2 שני חישובים. נוכיח באינדוקציה על יצירת הפסוק ϕ כי אם $\phi\in\mathrm{Dom}H_1\cap\mathrm{Dom}H_2$ אז $H_1(\phi)=H_2(\phi)$.

אם ϕ הוא פסוק יסודי אז, מכיוון ש-H_1 ו-H_2 מקיימים את $(*)$א׳ קיים $H_1(\phi)=G_0(\phi)=H_2(\phi)$.

אם $\phi=\neg\psi$ ו- $\phi\in\mathrm{Dom}H_1\cap\mathrm{Dom}H_2$ אז מכיוון שגם $\mathrm{Dom}H_1$ וגם $\mathrm{Dom}H_2$ הן קבוצות יצירה שתיהן מכילות גם את ψ, כלומר, גם $\psi\in\mathrm{Dom}H_1\cap\mathrm{Dom}H_2$. לכן לפי הנחת האינדוקציה קיים $H_1(\psi)=H_2(\psi)$. מכיוון ש-H_1 ו-H_2 מקיימים את $(*)$ב׳ קיים $H_1(\phi)=G_\neg(H_1(\psi)=G_\neg(H_2(\psi)))=H_2(\phi)$.

אם $\phi=\psi\Box\chi$ ו- $\phi\in\mathrm{Dom}H_1\cap\mathrm{Dom}H_2$ אז מכיוון שגם $\mathrm{Dom}H_1$ וגם $\mathrm{Dom}H_2$ הן קבוצות יצירה שתיהן מכילות גם את ψ ואת χ, כלומר, גם $\psi,\chi\in\mathrm{Dom}H_1\cap\mathrm{Dom}H_2$. לכן לפי הנחת האינדוקציה קיים $H_1(\psi)=H_2(\psi)$ ו- $H_1(\chi)=H_2(\chi)$. מכיוון ש-H_1 ו-H_2 מקיימים את $(*)$ג׳ קיים $H_1(\phi)=G_\Box(H_1(\psi),H_1(\chi))=G_\Box(H_2(\psi),H_2(\chi))=H_2(\phi)$.

יחידות הפונקציה F. תהיינה F_1 ו-F_2 פונקציות כמו במשפט 2.25 אז $F_1=F_2$, כלומר קיימת לכל היותר פונקציה F אחת המקיימת את ההגדרה ברקורסיה.

הוכחה. התחום של F_1 ושל F_2 הוא הקבוצה Π של כל הפסוקים, שהיא בוודאי קבוצת יצירה, ולכן F_1 ו-F_2 הם חישובים. לפי למה א׳ הפונקציות F_1 ו-F_2 מתיישבות, ומכיוון שהן בעלות אותו תחום הן שוות.

למה ב׳. כל איחוד של חישובים הוא חישוב. בניסוח מדוייק יותר, אם W קבוצה של חישובים אז איחודם $\bigcup W$ גם הוא חישוב.

הוכחה. W היא קבוצה של פונקציות שלפי למה א׳ כל שתיים מהן מתיישבות. לכן, כידוע, גם איחודן

$J=\bigcup W$ הוא פונקציה.
קיים כמובן $\mathrm{Dom}J=\bigcup_{H\in W}\mathrm{Dom}H$. לכל $H\in W$ $\mathrm{Dom}H$ היא קבוצת יצירה ולכן $\mathrm{Dom}J$ הוא איחוד של קבוצות יצירה. קל מאוד לראות כי איחוד של קבוצות יצירה הוא קבוצת יצירה, ולכן $\mathrm{Dom}J$ הוא קבוצת יצירה.
נותר לנו לראות כי J מקיימת את $(*)$. יהי $\phi\in\mathrm{Dom}J$, אז קיים $H\in W$, $H\subseteq J$, כך ש- $\phi\in\mathrm{Dom}H$.
אם ϕ פסוק יסודי אז מכיוון ש-H מקיים את $(*)$א' קיים $J(\phi)=H(\phi)=G_0(\phi)$, כלומר J מקיים את $(*)$א'.
אם $\phi=\neg\psi$ אז גם $\psi\in\mathrm{Dom}H$, ומכיוון ש-H מקיים את $(*)$ב' קיים
$J(\phi)=H(\phi)=G_\neg(H(\psi))=G_\neg(J(\psi))$, כלומר J מקיים את $(*)$ב'.
אם $\phi=\psi\square\chi$ אז גם $\psi,\chi\in\mathrm{Dom}H$, ומכיוון ש-$H$ מקיים את $(*)$ב' קיים
$J(\phi)=H(\phi)=G_\square(H(\psi),H(\chi))=G_\square(J(\psi),J(\chi))$, כלומר J מקיים את $(*)$ג'.

למה ג'. לכל פסוק יש חישוב.
הוכחה. נוכיח שלכל פסוק ϕ יש חישוב באינדוקציה על יצירת ϕ.
אם ϕ הוא פסוק יסודי אז הפונקציה $\{\langle\phi,G_0(\phi)\rangle\}$ היא חישוב ל-ϕ כי תחומה $\{\phi\}$ הוא קבוצת יצירה והיא מקיימת את התנאי $(*)$א', שהוא התנאי היחיד הרלוונטי עבורה מבין התנאים של $(*)$.
אם $\phi=\neg\psi$ נניח, כהנחת האינדוקציה, כי לפסוק ψ יש חישוב H ונוכיח כי גם ל-ϕ יש חישוב. אם $\phi\in\mathrm{Dom}H$ אז H הוא גם חישוב ל-ϕ. נניח לכן כי $\phi\notin\mathrm{Dom}H$ ונוכיח כי במקרה זה $J=H\cup\{\langle\phi,G_\neg(H(\psi))\rangle\}$ היא חישוב ל-ϕ. מכיוון ש-H היא חישוב $\mathrm{Dom}H$ היא קבוצת יצירה. גם $\mathrm{Dom}J=\mathrm{Dom}H\cup\{\phi\}$ היא קבוצת יצירה כי היא מכילה את כל הרכיבים של פסוקי $\mathrm{Dom}H$, וגם את הרכיב של ϕ שהוא ψ. כדי לראות ש-J היא חישוב עלינו לוודא ש-J מקיימת את השוויונות של $(*)$. לכל פסוק χ ב- $\mathrm{Dom}H$ גם רכיביו ב- $\mathrm{Dom}H$ ומכיוון ש-J מתלכדת עם H על פסוקים אלו ו-H מקיימת את $(*)$ גם J מקיימת את $(*)$ ביחס ל-χ. לפסוק ϕ קיים, לפי הגדרת J, $J(\phi)=G_\neg(H(\psi))=G_\neg(J(\psi))$. מכיוון שלפי משפט הקריאה היחידה $\phi=\neg\psi$ היא הקריאה היחידה של ϕ לכן שוויון זה מוכיח ש-$(*)$ קיים גם ביחס ל-ϕ.
אם $\phi=\psi\square\chi$ נניח, כהנחת האינדוקציה, כי לפסוק ψ יש חישוב H_1 ולפסוק χ יש חישוב H_2 ונוכיח כי גם ל-ϕ יש חישוב. לפי למה ב' האיחוד $H=H_1\cup H_2$ גם הוא חישוב, והוא חישוב ל-ψ ול-χ. אם $\phi\in\mathrm{Dom}H$ אז H הוא גם חישוב ל-ϕ. נניח לכן כי $\phi\notin\mathrm{Dom}H$ ונוכיח כי במקרה זה $J=H\cup\{\langle\phi,G_\square(H(\psi),H(\chi))\rangle\}$ היא חישוב ל-ϕ. מכיוון ש-H היא חישוב $\mathrm{Dom}H$ היא קבוצת יצירה. גם $\mathrm{Dom}J=\mathrm{Dom}H\cup\{\phi\}$ היא קבוצת יצירה כי היא מכילה את כל הרכיבים של פסוקי $\mathrm{Dom}H$, וגם את הרכיבים של ϕ שהם ψ ו-χ. כדי לראות ש-J היא חישוב עלינו לוודא ש-J מקיימת את השוויונות של $(*)$. לכל פסוק ρ ב- $\mathrm{Dom}H$ גם רכיביו ב- $\mathrm{Dom}H$ ומכיוון ש-J מתלכדת עם H על פסוקים אלו ו-H מקיימת את $(*)$ גם J מקיימת את $(*)$ ביחס ל-ρ. לפסוק ϕ קיים, לפי הגדרת J, $J(\phi)=G_\square(H(\psi),H(\chi))=G_\square(J(\psi),J(\chi))$. מכיוון שלפי משפט הקריאה היחידה $\phi=\psi\square\chi$ היא הקריאה היחידה של ϕ לכן שוויון זה מוכיח ש-$(*)$ קיים גם ביחס ל-ϕ.

קיום הפונקציה F.
הוכחה. תהי F האיחוד של כל החישובים. לפי למה ב' F היא חישוב. לפי למה ג' $\mathrm{Dom}F$ מכיל את כל הפסוקים, כלומר $\mathrm{Dom}F=\Pi$ ו-F היא כנדרש ב-2.25.

נעיר שכתוצאה מהוכחת המשפט על ההגדרה ברקורסיה יש בידינו הגדרה מפורשת של הפונקציה F, שצורתה הפשוטה ביותר היא ש- $F(\phi)$ הוא הערך שחישוב כלשהו נותן ל-ϕ, כאשר קיום חישוב כזה מובטח ע"י למה ג', ויחידות הערך מובטחת ע"י למה א'. זאת הינה הגדרה מפורשת כי מושג החישוב אינו משתמש בפונקציה F.

2.26 תרגיל. א. כתוב הגדרה ברקורסיה, לפי המתכונת של 2.25, של פונקצית הזהות $F(\phi)=\phi$. מהן במקרה זה הקבוצה W והפונקציות G_0, $G_\neg$, ו- $G_\square$ של 2.25?

ב. תהי F הפונקציה המוגדרת ע"י

$$F(\phi)=\begin{cases}\langle\phi\rangle & \text{אם } \phi \text{ פסוק יסודי}\\ \langle\phi,\neg,\psi\rangle & \text{אם } \phi=\neg\psi\\ \langle\phi,\square,\psi,\chi\rangle & \text{אם } \phi=\psi\square\chi\end{cases}$$

כתוב הגדרה ברקורסיה, לפי המתכונת של 2.25, של F. מהן במקרה זה הקבוצה W והפונקציות G_0, $G_\neg$, ו- $G_\square$ של 2.25?

ג. הסק מ-ב׳ שמשפט ההגדרה ברקורסיה 2.25 גורר ישירות את משפט הקריאה היחידה 2.17.

2.27 השפה. מבין כל המרכיבים של תחשיב הפסוקים אחד הוא עדיין לא קבוע לגמרי וזהו קבוצת הפסוקים היסודיים. כל מה שאמרנו עד כה הוא שזאת קבוצה של סימנים אבל לא אמרנו דבר על מיהם הסימנים בקבוצה זאת ומהו גודל הקבוצה. אנו יכולים לבחור עבור קבוצה זאת קבוצת סימנים כלשהי, ובלבד שלא תכיל את הסוגרים ואת סימני הקשרים הפסוקיים היסודיים. בחירת קבוצה מסויימת כקבוצת הפסוקים היסודיים גם קובעת לגמרי את הפסוקים של תחשיב הפסוקים. לכן נאמר שבחירת קבוצת הפסוקים היסודיים קובעת את השפה של תחשיב הפסוקים, ויותר מזה, אנו נזהה את השפה עם קבוצת הפסוקים היסודיים שלה. כך אם L היא קבוצה מסויימת של פסוקים יסודיים נדבר על השפה L ובכך נתכוון לשפת תחשיב הפסוקים כאשר איברי L הם הפסוקים היסודיים בה.

כמעט כל מה שנאמר בדיון שלנו בתחשיב הפסוקים יהיה נכון לכל שפה. מנקודת הראות של הענין שלנו בספר זה אפשר לומר ששפה תיקנית של תחשיב הפסוקים היא שפה L בת מנייה, ולעיתים נעסוק גם בשפות שהן סופיות או שאינן בנות מניה.

2.28 למה. בדרך בה אנו הגדרנו את הקשרים הפסוקיים ב-2.9 וכן בהגדרתם בכתיב הפולני ב-2.20 קיים:

(1) $\psi\square\chi$ מורכב משני קטעים שהם ψ ו-χ בתוספת הופעה אחת של הסימן $\boldsymbol{\square}$ ומספר הופעות, היכול גם להיות 0, של סוגרים, ו- $\neg\psi$ מורכב מקטע שהוא ψ בתוספת הופעה יחידה של הסימן $\boldsymbol{\neg}$ ומספר הופעות, שבמקרים אלו הוא 0, של סוגרים.

מכאן ואילך נניח תמיד ש-(1) קיים.

נסמן ב-$\mathsf{n}(a,\phi)$ את מספר ההופעות של הסימן a בביטוי ϕ. לכל הגדרה של הקשרים הפסוקיים היסודיים המקיימת את (1) קיים:

(2)

לכל פסוק יסודי P	$\mathsf{n}(P,P)=1$
ולכל סימן $a\neq P$ שהוא פסוק יסודי או סימן קשר	$\mathsf{n}(a,P)=0$
לכל סימן קשר דו-מקומי $\boldsymbol{\square}$	$\mathsf{n}(\boldsymbol{\square},\psi\square\chi)=\mathsf{n}(\boldsymbol{\square},\psi)+\mathsf{n}(\boldsymbol{\square},\chi)+1$
ולכל סימן $a\neq\boldsymbol{\square}$ שהוא פסוק יסודי או סימן קשר	$\mathsf{n}(a,\psi\square\chi)=\mathsf{n}(a,\psi)+\mathsf{n}(a,\chi)$
קיים	$\mathsf{n}(\boldsymbol{\neg},\neg\psi)=\mathsf{n}(\boldsymbol{\neg},\psi)+1$
ולכל סימן $a\neq\boldsymbol{\neg}$ שהוא פסוק יסודי או סימן קשר	$\mathsf{n}(a,\neg\psi)=\mathsf{n}(a,\psi)$

2.29 תרגיל. יהי ϕ פסוק בשפה L_1 שכל סימניו נמצאים בשפה L_2 אז ϕ הוא גם פסוק ב-L_2.

רמז: הוכח זאת באנדוקציה על ϕ ב-L_1.

מה שמשפט זה אומר הוא שכדי לדעת אם מחרוזת ϕ היא פסוק איננו צריכים לדעת מראש באיזו שפה מדובר. די לראות אם היא פסוק בשפה שפסוקיה היסודיים הם בדיוק הפסוקים היסודיים המופיעים ב-ϕ. אם התשובה היא שלילית אז ϕ אינה פסוק בשום שפה, ואם התשובה היא חיובית אז ϕ היא פסוק בכל שפה המכילה את הפסוקים היסודיים של ϕ.